

$d = e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$       $\varphi(n) = \frac{2^2}{16 \times} \frac{132}{22 \cdot 6} = 352$   
 $d_p = d \pmod{\varphi(p)}$       $\varphi(p) = 16$   
 $d_q = d \pmod{\varphi(q)}$       $\varphi(q) = 22$

a	b	[a/b]	u	v
352	7	50	-3	1-50·-3 = 151
7	2	3	1	0-3·1 = -3
2	1	2	0	1
1	0		1	0

$d = 151 \pmod{352} = 151$   
 $d_p = 151 \pmod{16} = 7$   
 $d_q = 151 \pmod{22} = 19$

~~$sp = (h(m))^{d_p} \pmod{p} = (100)^7 \pmod{16}$   
 $= ((100)^2)^3 \cdot 100 \pmod{16}$   
 $= ((4)^2 \cdot 4)^2 \cdot 4 \pmod{16}$   
 $= (16 \cdot 4)^2 \cdot 4 \pmod{16}$   
 $= (0 \cdot 4)^2 \cdot 4 \pmod{16}$   
 $= 0 \pmod{16} = 0$~~

~~$sq = (h(m))^{d_q} \pmod{q} = (100)^{19} \pmod{22}$   
 $= (((((100)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 100 \pmod{22}$   
 $= (((((12)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 12 \pmod{22}$   
 $= (((((144)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 12 \pmod{22}$   
 $= (((((12)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 12 \pmod{22}$   
 $= 12 \pmod{22}$   
 $= 12$~~

$sp = (h(m))^{d_p} \pmod{p}$   
 $= (100)^7 \pmod{17}$   
 $= ((100)^2)^3 \cdot 100 \pmod{17}$   
 $= ((15)^2)^3 \cdot 15 \pmod{17}$   
 $= (225 \cdot 15)^2 \cdot 15 \pmod{17}$   
 $= (4 \cdot 15)^2 \cdot 15 \pmod{17}$   
 $= (60)^2 \cdot 15 \pmod{17}$   
 $= 3600 \cdot 15 \pmod{17}$   
 $= 13 \cdot 15 \pmod{17}$   
 $= 195 \pmod{17}$   
 $= 8 \pmod{17}$

$sq = (100)^{19} \pmod{23}$   
 $= (((((100)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 100 \pmod{23}$   
 $= (((((8)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= (((((64)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= (((((18)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= (((((324)^2)^2)^2)^2)^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= (((((2)^2 \cdot 8)^2)^2)^2)^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= (4 \cdot 8)^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= (32)^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= 9^2 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= 81 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= 12 \cdot 8 \pmod{23}$   
 $= 96 \pmod{23}$   
 $= 4$

7 = [11]₂

19 = 16+2+1 = [10011]₂

$s = 3 \cdot 23 - 4 \cdot 17 = 69 - 68 = 1$   
 $s = 3 \cdot 23 - 4 \cdot 17 = 1 \pmod{p \cdot q}$

a	b	[a/b]	u	v
23	17	1	3	-1-1·3 = -4
17	6	2	-1	1-2·-1 = 3
6	5	1	1	0-1·1 = -1
5	1	5	0	1
1	0		1	0

$s = 3 \cdot 23 - 4 \cdot 17 = 1 \pmod{p \cdot q}$   
 $3 \cdot 23 - 4 \cdot 17 = 1 \pmod{p \cdot q}$

$280^7 \pmod{391} = 100$   
 here:  $u \cdot q \cdot sp + v \cdot p \cdot sq = s \pmod{n}$

now, we have

$$sp = sp'$$

$$sq = 4$$

$$\begin{aligned} \text{hence, } s' &\equiv 3 \cdot 23 \cdot sp' - 4 \cdot 17 \cdot 4 \\ &= 69 \cdot sp' - 272 \\ &= 69 \cdot sp' + 119 \pmod{391} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k' &= (s')^e \pmod{n} \\ &= (69 \cdot sp' + 119)^7 \pmod{n} \\ &= (69 \cdot sp' + 119)^7 \pmod{391} \end{aligned}$$

say  $sp' = 7$  (instead of  $d$ )

then, we have

$$\begin{aligned} k' &= (69 \cdot 7 + 119)^7 \pmod{391} \\ &= (483 + 119)^7 \pmod{391} \\ &= (602 \pmod{391})^7 \\ &= 211^7 \pmod{391} \\ &= ((211)^2 \cdot 211)^2 \cdot 211 \pmod{391} \\ &= (44521 - 211)^2 \cdot 211 \pmod{391} \\ &= (338 - 211)^2 \cdot 211 \pmod{391} \\ &= (71318)^2 \cdot 211 \pmod{391} \\ &= 156^2 \cdot 211 \pmod{391} \\ &= 24336 \cdot 211 \pmod{391} \\ &= 94 \cdot 211 \pmod{391} \\ &= 19834 \pmod{391} \\ &= 19834 \pmod{391} \\ &= 225284 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= \gcd(n, k' - l(m)) \\ &= \gcd(391, 204 - 100) \\ &= \gcd(391, 104) \end{aligned}$$

a	b	[a/b]
391	104	2
184	23	d
23	0	

$$q = \gcd(391, 104) = 23$$

$$p = \frac{n}{q} = \frac{391}{23} = 17$$

8

~~$$q = \gcd(n, k' - l(m))$$~~

~~$$= \gcd(391, 225 - 100)$$~~

~~$$= \gcd(391, 125)$$~~

a	b	[a/b]	u	v
391	125	3		
125	16	7		
16	13	1		
13	3	4		
3	1	3		
1	0			